Zápočtový test z RFA I - 14.prosinec 2016

Příklad č.1:Pomocí Hamiltonových rovnic ukažte, že pro testovacé částici pohybující se v metrickém poli

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + f^{-1}(r)\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 \tag{1}$$

jsou veličiny p_t a p_ϕ konstatntní. Zde je p_i i-tá kovariantní složka 4-hybnosti test. částice.
Nápověda: Hamiltonovy rovnice jsou

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \tag{2}$$

Hamiltonián volné částice má v metrickém poli g_{ij} tvar

$$H = \frac{1}{2}g^{ij}p_ip_j. \tag{3}$$

Příklad č.2:Ve Schwarzchildově metrickém poli je z $r = R_0$ radiálně vržen testovací kámen s počáteční 4-rychlostí

$$\vec{U}_0 = (U_0^t, U_0^r > 0, 0, 0). \tag{4}$$

Na jakém $r = R_1$ se kámen, na okamžik, zastaví?
Nápověda: Prostoročasový interval Schwarzchildova metrického pole je

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + f^{-1}(r)\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 \tag{5}$$

kde je

$$f(r) = 1 - 2/r. \tag{6}$$

Příklad č.3:Z radiální pozice $r = R_e$ je z klidu uvolněna světlice, která volně padá směrem ke gravitujícímu centru Schwarzchildovy černé díry. Nechť světlice lokálně září izotropně a monochromaticky na frekvenci ν_e. Jaká bude frekvence ν_o (vyjádřena pomocí ν_e) fotonu pozorovaného v místě $r = R_o >> 1$?
Nápověda: Energie fotonu se 4-hybností k^i, který pozoruje pozorovatel se 4-rychlostí u^i je

$$E = h\nu = -k_iu^i. \tag{7}$$

Tož ať se vám daří!

Řešení

Řešení příkladu č.1:Hamiltonián H, v případě zadané metriky, explicitně nezávisí na t ani na ϕ, tj.

$$H \neg H(t, \phi). \tag{8}$$

Odtud a z prvního setu Hamiltonových rovnic zřejmě plyne

$$\frac{\mathrm{d}p_t}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x^t} = -\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow p_t = konst_1 \tag{9}$$

a

$$\frac{\mathrm{d}p_\phi}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x^p hi} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow p_\phi = konst_2. \tag{10}$$

Řešení příkladu č.2:Pro radiální složku 4-rychlosti kamene platí

$$(u^r)^2 = E^2 - (1 - 2/r). \tag{11}$$

Jestliže byl vržen počáteční 4-rychlostí $u_0 = (u_0^t, u_0^r, 0, 0)$ pak čtverec jeho kovariantní energie E zřejmě bude

$$E^2 = (u_o^r)^2 + (1 - 2/r_o). \tag{12}$$

V bodě $r = r_1$ se kámen zastaví, tj. $u_1^r = 0$, tzn.

$$0 = E^2 - (1 - 2/r_1) \Rightarrow r_1 = \frac{2}{1 - E^2}. \tag{13}$$

Po dosazení za E dostaneme požadovaný vztah

$$r_1 = \frac{2}{2/r_o - (u_o^r)^2}. \tag{14}$$

Řešení příkladu č.3:Určeme jaký je poměr frekvencí pozorované ν_o a emitované ν_e, tj.

$$\frac{\nu_o}{\nu_e} = \frac{(-k_i u^i)_o}{(-k_i u^i)_e}. \tag{15}$$

Pozorovatel je na $r = r_o >> 1$ a je v klidu, jeho složky 4-rychlosti jsou

$$u_o = (u_o^t, 0, 0, 0). \tag{16}$$

Z normovací podmínky pro 4-rychlost pak dostáváme

$$-1 = u_i u^i = g_{ij} u^i u^j = g_{tt} (u^t)^2 \Rightarrow u_o^t = 1/\sqrt{1 - 2/r_o} \to 1 \text{ pro } r_o >> 1. \tag{17}$$

Světlice volně padá z $r = r_e$ kde byla v klidu. Její složky 4-rychlosti jsou

$$u_e = (u_e^t, u_e^r, 0, 0). \tag{18}$$

Pro radiální složku 4-rychlosti dostaneme

$$(u_e^r)^2 = E^2 - (1 - 2/r) = 2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_e}\right) \tag{19}$$

kde kovariantní energii světlice, E, určíme z počáteční podmíky $u_e^r(r = r_e) = 0$, tj.

$$E = \sqrt{1 - 2/r_e}. \tag{20}$$

Pro časovou složku 4-rychlosti světlice obdržíme vztah

$$u_e^t = g_{tt} u_{te} = -g_{tt} E = \frac{\sqrt{1 - 2/r_e}}{1 - 2/r}. \tag{21}$$

Náš vztah pro poměr frekvencí fotonu, po dosazení za 4-rychlosti pozorovatele a světlice, bude mít tvar

$$\frac{\nu_o}{\nu_e} = \frac{k_t}{k_t u_e^t (1 + \frac{k_r}{k_t}\frac{u_e^r}{u_e^t})} = \frac{1 - 2/r}{\sqrt{1 - 2/r_e}\left(1 - \frac{k_r}{k_t}\frac{(1-2/r)\sqrt{2(1/r - 1/r_e)}}{\sqrt{1 - 2/r_e}}\right)}. \tag{22}$$

Zbývá určit poměr k_r/k_t. Pro radiální složku 4-rychlosti, radiálně se pohybujícího se fotonu je

$$(k^r)^2 = 1 - (1 - 2/r)\frac{l^2}{r^2} = 1 \tag{23}$$

protože $l = 0$. To znamená, že pro kovariantní, radiální složku dostaneme formuli

$$k_r = g_{rr} k^r = g_{rr} = \frac{1}{1 - 2/r}. \tag{24}$$

Protože jsme v rovnicích pro ulové geodetiky absorbovali kovariantní energii do afinního parametru, je $k_t = 1$. Přesvedčit se o tom můžeme třeba z normovací podmínky, máme totiž

$$0 = g^{tt}(k_t)^2 + g^{rr}(k_r)^2 \Rightarrow (k_t)^2 = -\frac{g^{rr}}{g^{tt}}(k_r^2) = \frac{(1 - 2/r)^2}{(1 - 2/r)^2} = 1. \tag{25}$$

Frekvence ν_o vyjádřena pomocí frekvence ν_e potom je

$$\nu_o = \left(1 - \frac{2}{r}\right)\left[1 - \frac{\sqrt{2(1/r - 1/r_e)}}{\sqrt{1 - 2/r_e}}\right]^{-1} \nu_e \tag{26}$$

Znaménko u radiální složky 4-rychlosti světlice je "-". Světlice padá!