RFA I - Poznámky

Jan Schee
ÚF FPF SU Opava
jan.schee@fpf.slu.cz

18. listopadu 2016

1 Pohybové rovnice testovací částice

Podle principu nejmenší akce, který je univerzální (aspoň tomu věříme), vybírá "příroda" takovou trajektorii, jejíž délka je extremální. V časoprostoru je délkový element prostoro-časového intervalu

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j. \tag{1}$$

Akce pro volnou testovací částici pak bude

$$S = \int_A^B \mathrm{d}s \tag{2}$$

a ze všech možných trajektorií bude vybrána ta, která splňuje rovici

$$\delta S = 0. \tag{3}$$

Dříve než vyřešíme rovnici (3) určeme δs. Postupně dostaneme

$$\delta\mathrm{d}s^2 = 2\mathrm{d}s\delta\mathrm{d}s = \delta\left(g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\right) \tag{4}$$

a

$$\delta\left(g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\right) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^a}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\delta x^a + 2g_{ij}\mathrm{d}x^i\delta\mathrm{d}x^j. \tag{5}$$

Pro $\delta\mathrm{d}s$ tak dostáváme rovnici

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\delta s &= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^a}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}x^j\delta x^a + g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\delta\mathrm{d}x^j && (6)\\
&= \left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^a}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\delta x^a + g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\delta x^j}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s && (7)
\end{aligned}$$

Obdrželi jsme tak integrál

$$\delta S = \int_A^B \left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^a}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\delta x^a + g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\delta x^j}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s. \tag{8}$$

Dále, zřejmě platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\delta x^j\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\right)\delta x^j + g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\delta x^j}{\mathrm{d}s} \tag{9}$$

takže výraz (8) přepíšeme na tvar

$$\delta S = \int_A^B \left[\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^a}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\delta x^a - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\right)\delta x^j \right] \mathrm{d}s + \left[g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\delta x^j \right]_A^B = 0. \tag{10}$$

Všechy možné trajektorie začínají v A a končí v B tzn. $\delta x^i|_A = \delta x^i|_B = 0$ a zbylý integrál platí pro libovolné ds, musí tedy platit

$$\frac{1}{2} g_{ij,a}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g_{ia}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\right) = 0. \tag{11}$$

Tuto rovnici ještě upravíme rozderivováním druhého členu a dostáváme

$$\frac{1}{2} g_{ij,a}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} - g_{ia,j}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} - g_{ia}\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}s^2} = 0. \tag{12}$$

Dále si všimněme, že platí následující vztah

$$\begin{aligned} g_{ia,j}u^iu^j &= \frac{1}{2}\left(g_{ia,j}u^iu^j + g_{ia,j}u^iu^j \right) \\ &= \frac{1}{2}\left(g_{ia,j}u^iu^j + g_{ja,i}u^ju^i \right) \\ &= \frac{1}{2}\left(g_{ia,j} + g_{ja,i} \right) u^iu^j. \end{aligned} \tag{13}$$

kde jsme zavedli $u^i \equiv \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}s$. Dosadíme tento výsledek do (12) a dostaneme

$$\frac{1}{2}(g_{ij,a} - g_{ia,j} - g_{ja,i})u^iu^j - g_{ia}\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{14}$$

Nakonec vynásobíme celou rovnici maticí g^{ka} a -1 a máme výsledek

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}s} + \frac{1}{2}g^{ka}(-g_{ij,a} + g_{ia,j} + g_{ja,i})u^iu^j &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}s} + \Gamma^k_{ij}u^iu^j &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Zde jsou Γ koeficienty afinní konexe které jsou určeny metrikou

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{is}(-g_{jk,s} + g_{sk,j} + g_{js,k}). \tag{16}$$

V limitě malých rychlostí $u^t >> u^i$ pro $i = 1, 2, 3$ pro stacionární gravitační pole obdržíme pohybové rovnice tvaru

$$\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^i_{00}(u^0)^2 = 0. \tag{17}$$

Spočítejme Γ^i_{00} v limitě slabých polí, tj. pro metriku

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}, \text{ kde je } |h_{ij}| << 1, \tag{18}$$

dostáváme

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{00} &= \frac{1}{2}g^{is}(-g_{00,s} + g_{0s,0} + g_{0s,0}) = -\frac{1}{2}g^{is}g_{00,s} \\ &= -\frac{1}{2}\eta^{is}g_{00,s} = -\frac{1}{2}\eta^{ii}h_{00,i}. \end{aligned} \tag{19}$$

Rozdělíme soustavu pohybových rovnic na časovou prostorovou a obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{2}\eta^{00}h_{00,0}(u^0)^2 = 0 \Rightarrow u^0 = \text{const}, \tag{20}$$

a

$$\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{2}\eta^{ii}h_{00,i}(u^0)^2 \to \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{2}\nabla h_{00}(u^0)^2. \tag{21}$$

Zjistili jsme, že časová složka 4-rychlosti částice u^0 je konstantní. Ukážeme, že $1/(u^0)^2\mathrm{d}^2/\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}^2/\mathrm{d}t^2$. Počítejme

$$\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}. \tag{22}$$

Rovnici (21) potom obdržíme ve finálním tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{2}\nabla h_{00}. \tag{23}$$

Druhý Newtonův pohybový zákon pro testovací částici v gravitačním poli s potenciálem Φ má tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = -\nabla\Phi. \tag{24}$$

Srovnáním posledních dvou rovnic zjistíme, že platí

$$\nabla(2\Phi + h_{00}) = 0 \Rightarrow h_{00} = -2\Phi + \text{const}. \tag{25}$$

Newtonův gravitační potenciál Φ ve nekonečnu vymizí a protože očekáváme, že ve velkých vzdálenostech od grav. centra bude prostoročas popsán Minkowského metrikou musí být const $= 0$. Pro 00-složku metrického tenzoru dostaneme výsledek

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = -(1 + 2\Phi). \tag{26}$$

Na této analýze je vidět korespondence mezi Newtonovým gravitačním polem reprezentovaným potenciálem Φ a Einsteinovýn zakřiveným prostoročasem.

2 Metrický tenzor a afinní konexe

Prostoročas z pohledu volně padajícího systému je lokálně inerciální a popsaný Minkowského metrickým tenzorem $\eta_{ij} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Označme souřadnice v LIS, ξ^i. Dále uvažujme obecný souřadný systém vybavený souřadnicemi x^j (rotující, vznášející se na pevném r v gravitačním poli, ...). Mezi oběma souřadnými systémy existuje transformace $\xi^i \longleftrightarrow x^i$. Metrický tenzor z pohledu systému x^i určuje tenzorové transformační pravidlo

$$g_{ij} = \frac{\partial\xi^a}{\partial x^i}\frac{\partial\xi^b}{\partial x^j}\eta_{ab}. \tag{27}$$

Nyní, nechť je s LIS spojená volně padající částice. Její pohybové rovnice, v tomto systému, zřejmě budou mít tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^i}{\mathrm{d}\tau^2} = 0. \tag{28}$$

Nyní pozorujme tuto částici z obecného systému x^j a určeme v něm její pohybové rovnice. Dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\xi^i}{\mathrm{d}\tau^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\tau}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}\right)\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}\frac{\mathrm{d}^2x^j}{\mathrm{d}\tau^2} \\ &= \frac{\partial^2\xi^i}{\partial x^j\partial x^k}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}\frac{\mathrm{d}^2x^j}{\mathrm{d}\tau^2} = 0. \qquad (29)\end{aligned}$$

Nakonec vynásobíme celou rovnici maticí $\partial x^a/\partial\xi^i$ a dospějeme k výsledné pohybové rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2x^a}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{\partial x^a}{\partial\xi^i}\frac{\partial^2\xi^i}{\partial x^j\partial x^k}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\tau} = 0. \qquad (30)$$

Srovnáním s rovnicí geodetiky zjistíme, že afinní konexe Γ^i_{jk} je dána výrazem

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial x^i}{\partial\xi^s}\frac{\partial^2\xi^s}{\partial x^j\partial x^k}. \qquad (31)$$

Ukažme nyní, na základě transformačních vlastností Γ^i_{jk}, že se nejedná o tenzor. Uvažujme přechod ze souřadného systému x^i do $x^{i'}$. Pokud by byl Γ^i_{jk} tenzorem, pak by se m2l transformovat takto

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} \stackrel{?}{=} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma^i_{jk}. \qquad (32)$$

Počítejme,

$$\begin{aligned}\Gamma^{i'}_{j'k'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial\xi^a}\frac{\partial^2\xi^a}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial\xi^a}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial\xi^a}{\partial x^k}\right) \\ &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial\xi^a}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\right)\frac{\partial\xi^a}{\partial x^k} + \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial^2\xi^a}{\partial x^j\partial x^k}\right] \\ &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^i}{\partial\xi^a}\frac{\partial^2\xi^a}{\partial x^j\partial x^k} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}} \\ &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma^i_{jk} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}. \qquad (33)\end{aligned}$$

Když srovnáme očekávaný výsledek transformace s vypočítaným tak dojdeme k závěru, že Γ^i_{jk} není tenzor.

3 Přílivové síly a Riemanův tenzor křivosti

Máme dvě testovací částice, které padají radiálně spojené nehmotným lankem. Dělí je od sebe vektor δr. Jaký je rozdíl mezí gravitačním zrychlením na první a druhou částici na vzdálenosti $|\delta r|$?

Nechť je $\delta r << 1$, rozvineme sílu působící na částici F do Taylorova rozvoje a dostaneme

$$F(r+\delta r) \simeq F(r) + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\,|_r\,\delta r \qquad (34)$$

Položíme hmotnost testovacích částic $m = 1$ a dostáváme pro rozdíl zrychlení obou test částic vztah

$$a(r+\delta r) - a(r) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\delta r. \qquad (35)$$

Pro zrychlení a zřejmě platí

$$a(r) = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} \tag{36}$$

takže nakonec dostaneme rovnici pro vývoj odchylky δr ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2(r+\delta r)}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} \simeq \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\delta r \tag{37}$$

neboli

$$\frac{\mathrm{d}^2 \delta r}{\mathrm{d}t^2} \simeq \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\delta r. \tag{38}$$

Pro gravitační sílu hmotného bodu $F = -GM/r^2$ tak dostaneme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2 \delta r}{\mathrm{d}t^2} \simeq \frac{2GM}{r^3}\delta r \tag{39}$$

pro přílivové zrychlení působící na soustavu dvou hmotných bodů spojených pevným nehmotným lankem δr.

Studujme nyní tento problém z hlediska OTR. V rámci této teorie se volné testovací částice nepohybují pod vlivem gravitační síly ale sledují geodetiky v příslušném zakřiveném prostoročase. Co to znamená? Vektor ξ^μ, oddělující od sebe dvě geodetiky, vyhovuje rovnici geodetické deviace

$$\frac{\mathrm{D}^2 \xi^\mu}{\mathrm{D}\tau^2} = R^\mu_{\alpha\beta\gamma}\xi^\beta \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\delta}{\mathrm{d}\tau}. \tag{40}$$

Stejně jako v Newtonově rámci i zde sestavíme rovnici geodetické deviace v systému spojeném s první částicí na r.

$$\frac{\mathrm{D}^2 \xi^{\hat\mu}}{\mathrm{D}\tau^2} = R^{\hat\mu}_{\hat\alpha\hat\beta\hat\gamma}\xi^{\hat\beta} \frac{\mathrm{d}x^{\hat\alpha}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\hat\delta}}{\mathrm{d}\tau}. \tag{41}$$

Nenulové složky Riemanova tenzoru ve Schwarzchildově poli vyjádřené vůči souřadnicové bazi jsou

$$
\begin{aligned}
Rtrtr &= -R_{trrt} = -R_{rttr} = R_{rtrt} = \frac{2}{r^3}, && (42)\\
R_{t\theta t\theta} &= -R_{t\theta\theta t} = -R_{\theta tt\theta} = R_{\theta t\theta t} = -\frac{r-2}{r^2}, && (43)\\
R_{t\phi t\phi} &= -R_{t\phi\phi t} = -R_{\phi tt\phi} = R_{\phi t\phi t} = -\frac{(r-2)\sin^2\theta}{r^2}, && (44)\\
R_{r\theta r\theta} &= -R_{r\theta\theta r} = -R_{\theta rr\theta} = R_{\theta r\theta r} = \frac{1}{r-2}, && (45)\\
R_{r\phi r\phi} &= -R_{r\phi\phi r} = -R_{\phi rr\phi} = R_{\phi r\phi r} = \frac{\sin^2\theta}{r-2}, && (46)\\
R_{\theta\phi\theta\phi} &= -R_{\theta\phi\phi\theta} = -R_{\phi\theta\phi\theta} = -2r\sin^2\theta. && (47)
\end{aligned}
$$

Než přejdeme do volně padajícího systému, tak nejprve určíme ortonormální bázi statického pozorovatele, ze které, Lorentzovou transformací obdržíme ortonormální bázi volně padajícího pozorovatele.

Ortonormální báze statického pozorovatele vyjádřená vzhledem souřadnicové bázi je

$$\mathbf{e}_{\hat{t}} = \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}}\mathbf{e}_t = \sqrt{\frac{r}{r-2}}\mathbf{e}_t, \tag{48}$$

$$\mathbf{e}_{\hat{r}} = \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}\mathbf{e}_r = \sqrt{1-\frac{2}{r}}\mathbf{e}_r, \tag{49}$$

$$\mathbf{e}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta, \tag{50}$$

$$\mathbf{e}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}}\mathbf{e}_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\mathbf{e}_\phi. \tag{51}$$

Místní Lorentzova transformace je

$$[\Lambda^{\hat{i}}_{\tilde{j}}] = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma V & 0 & 0 \\ -\gamma V & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{52}$$

Takže báze volně padajícího pozorovatele vůči statické ortonormální bázi bude mít tvar

$$\mathbf{e}_{\tilde{t}} = \gamma\mathbf{e}_{\hat{t}} - \gamma V\mathbf{e}_{\hat{r}}, \tag{53}$$

$$\mathbf{e}_{\tilde{r}} = -\gamma V\mathbf{e}_{\hat{t}} + \gamma\mathbf{e}_{\hat{r}}, \tag{54}$$

$$\mathbf{e}_{\tilde{\theta}} = \mathbf{e}_{\hat{\theta}}, \tag{55}$$

$$\mathbf{e}_{\tilde{\phi}} = \mathbf{e}_{\hat{\phi}}. \tag{56}$$

Nakonec vyjádříme volně padající bázi vůči souřadnicové bázi

$$\mathbf{e}_{\tilde{t}} = \gamma\sqrt{\frac{r}{r-2}}\mathbf{e}_t - \gamma V\sqrt{1-\frac{2}{r}}\mathbf{e}_r, \tag{57}$$

$$\mathbf{e}_{\tilde{r}} = -\gamma V\sqrt{\frac{r}{r-2}}\mathbf{e}_t + \gamma\sqrt{1-\frac{2}{r}}\mathbf{e}_r, \tag{58}$$

$$\mathbf{e}_{\tilde{\theta}} = \frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta, \tag{59}$$

$$\mathbf{e}_{\tilde{\phi}} = \frac{1}{r\sin\theta}\mathbf{e}_\phi. \tag{60}$$

Matice transformace ze souřadnicové báze do volně padající nakonec vypadá následovně

$$[L^i_{\tilde{j}}] = \begin{pmatrix} \gamma\sqrt{\frac{r}{r-2}} & -\gamma V\sqrt{1-\frac{2}{r}} & 0 & 0 \\ -\gamma V\sqrt{\frac{r}{r-2}} & \gamma\sqrt{1-\frac{2}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r\sin\theta} \end{pmatrix} \tag{61}$$

a příslušná inverzní matice je

$$[L^{\tilde{i}}_j] = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\frac{2}{r}}\gamma & \sqrt{1-\frac{2}{r}}\gamma V & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{r}{r-2}}\gamma V & \sqrt{\frac{r}{r-2}}\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{62}$$

Složky Rienmannova tenzoru vůči volně padající bázi určíme podle transformačního pravidla

$$R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} = L^{\alpha}_{\hat{\alpha}} L^{\beta}_{\hat{\beta}} L^{\gamma}_{\hat{\gamma}} L^{\delta}_{\hat{\delta}} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{63}$$

a výsledkem budou následující nenulové složky $R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$

(64)

4 Kovariantní derivace

Uvažujme vektorové pole $V^a(x^c)$. Chceme-li porovnat vektory $V^a(x^c)$ v bodě P a $V^a(x^c + \delta x^c)$ v bodě Q, musíme, v zakřiveném prostoročase, nejprve přenést oba do společného bodu (společného tečného prostoru).

Kovariantní derivace vektoru V^a je definována následovně

$$V^a_{;b} \equiv \lim_{\delta x_b} \frac{1}{\delta x^b} \left[V^a(x + \delta x) - (V^a + \bar{\delta} V^a) \right]. \tag{65}$$

Vektorové pole $V^a(x)$ je dáno určitým předpisem. V bodě x^b bude $V^a(x^b)$ a v bodě $x^b + \delta x^b$ bude $V^a(x^b + \delta x^b)$. Pro malé δx^b lze tento předpis aproximovat Taylorovým rozvojem a dostaneme

$$V^a(x^b + \delta x^b) = V^a(x^b) + \delta x^b \partial_b V^a. \tag{66}$$

Při určování derivace srovnávám $V^a(x)$ (v bodě P) s $V^a(x+\delta x)$. K tomu ovšem musím "paralelně"přenést $V^a(x)$ do Q a dostanu $\bar{V}^a(x + \delta x)$. V plochém prostoročase je $\bar{V}^a(x + \delta x) = V^a(x)$ protože pro tečné prostory v obou bodech platí $T_P = T_Q$. Ovšem v obecně zakřiveném prostoročase je $T_P \neq T_Q$. Paralelně přenesený vektor v zakřiveném prostoročase $V^a + \bar{\delta} V^a$ je určený vektorem $\bar{\delta} V^a$. U něj přirozeně očekáváme, že vymizí, pokud bude δx^b nebo V^a rovno nule. Vektor se paralelně nepřenáší podél nulové složky posunutí δx^b nebo když je příslušná složka vektoru nulová. Proto je nejjednodušší vzít lineární kombinaci obou, tj.

$$\bar{\delta} V^a = -\Gamma^a_{bc} V^b \delta x^c. \tag{67}$$

Dosadíme oba poslední vztahy do definice kovariantní derivace a obdržíme výsledek

$$\begin{aligned} V^a_{;b} &= \lim_{\delta x^b \to 0} \frac{1}{\delta x^b} \left[V^a(x) + \delta x^b \partial_b V^a - V^a(x) + \Gamma^a_{cb} V^c \delta x^b \right] \\ &= \partial_b V^a + \Gamma^a_{bc} V^c. \end{aligned} \tag{68}$$

Paralelně přenášený vektor se nemění. Toto tvrzení je potřeba charakterizovat matematicky kvalitativně. Křivka, podél které přenášíme vektor V^a je charakterizována tečným vektorem, který je, pro křivku $x^b(\lambda)$, definován vztahem

$$t^a = \frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{69}$$

Vektor V^a je paralelně přenášen podél t^a právě tehdy, když platí [1]

$$t^a V^b_{;a} = 0. \tag{70}$$

[1]Nemění-li se podíl křivky x^i v Eukleidově prostoru funkce $\phi(x)$, pak bude $t^a \partial_a \phi(x^v) = 0$.

Nechť V^a a W^b jsou paralelně přenášené vektory. Je přirozené požadovat, aby byl jejich skalární součin během paralelního přenosu neměnný, tj. aby platilo

$$t^a (g_{ij} V^i W^j)_{;a} = 0. \qquad (71)$$

Postupně dostáváme

$$t^a V^i W^j g_{ij;a} + t^a V^i_{;a} W^j g_{ij} + t^a V^i W^j_{;a} g_{ij} = t^a V^i W^j g_{ij;a} = 0. \qquad (72)$$

Poslední výsledek musí platit pro všechny paralelně přenášené vektory, tj.

$$g_{ij;a} = 0. \qquad (73)$$

Mluvíme o *podmínce kompatibility kovariantní derivace s metrikou.*

Nyní uvažujme skalár $\Phi = p_a V^a$ a určeme jeho parciální derivaci, dostáváme

$$\begin{aligned} \Phi_{,b} &= p_{a,b} V^a + p_a V^a_{,b} \\ &= p_{a,b} V^a - \Gamma^a_{bc} p_a V^c + p_a V^a_{,b} + \Gamma^a_{bc} p_a V^c \\ &= V^a (p_{a,b} - \Gamma^c_{ba} p_c) + p_a (V^a_{,b} + \Gamma^a_{bc} V^c). \end{aligned} \qquad (74)$$

Z definice kovariantní derivace máme identitu (s využitím podmínky kompatibility, proč?)

$$\Phi_{,b} = \Phi_{;b} = (p_a V^a)_{;b} = p_{a;b} V^a + p_a V^a_{;b} \qquad (75)$$

ze které s pomocí předposledního výsledku plyne

$$p_{a;b} = p_{a,b} - \Gamma^c_{ab} p_c. \qquad (76)$$

Nyní už máme vztahy pro kovariantní derivaci kovariantních a kontravariantních vektorů. Tyto výsledky lze zobecnit na kovariantní derivaci tenzoru libovolného stupně. Např.

$$T_{ab;c} = T_{ab,c} - \Gamma^i_{ac} T_{ib} - \Gamma^i_{bc} T_{ai}. \qquad (77)$$

Nyní určíme, koeficienty afinní konexe pomoci metrického tenzoru a jeho parciálních derivací. Zřejmě platí

$$g_{ab;j} + g_{ja;b} - g_{bj;a} = 0. \qquad (78)$$

Postupně dostáváme

$$\begin{aligned} g_{ab,j} - \Gamma^i_{aj} g_{ib} - \Gamma^i_{bj} g_{ia} &\quad + \\ g_{ja,b} - \Gamma^i_{jb} g_{ia} - \Gamma^i_{ab} g_{ij} &\quad - \\ g_{bj,a} + \Gamma^i_{ba} g_{ij} + \Gamma^i_{ja} g_{ib} &\quad = \quad 0 \end{aligned} \qquad (79)$$

a to se rovná

$$g_{ab,j} + g_{ja,b} - g_{bj,a} - 2\Gamma^i_{jb} g_{ia} = 0 \qquad (80)$$

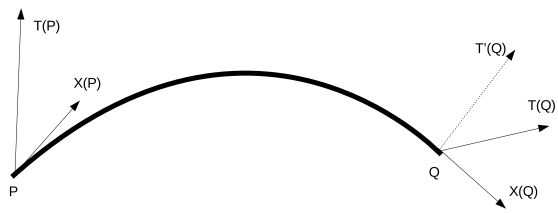
odkud plyne výsledek

$$\Gamma^s_{jb} = \frac{1}{2} g^{sa} (-g_{jb,a} + g_{ab,j} + g_{aj,b}). \qquad (81)$$

5 Lieova derivace

Uvažujme kongruenci křivek která je určena vektorovým polem $X^a(x)$. Dále uvažujme tenzor, pro názornost řádu $\binom{2}{0}$, T^{ab}, který chceme diferencovat s pomocí X^a. Nejprve tento tenzor, $T^{ab}(P)$, přeneseme z bodu P do bodu Q kde jej porovnáme s tenzorem, $T^{ab}(Q)$. Lieova derivace přes vektorové pole X^a je definována jako limitní proces

$$L_X T^{ab} = \lim_{\delta u \to 0} \frac{T^{ab}(x') - T'^{ab}(x')}{\delta u}. \tag{82}$$



Obrázek 1: Aktivní přenos tenzoru T z bodu P do bodu Q přes vektorové pole X.

Hodnota tenzoru $T^{ab}(x')$ v x' je aproximována Taylorovým rozvojem ve taru

$$T^{ab}(x') = T^{ab}(x^c + \delta u X^c(x)) = T^{ab}(x^c) + \delta u X^d \partial_d T^{ab}(x). \tag{83}$$

Transformace, která aktivně přenese tenzor T^{ab} z x do x' je

$$x'^c = x^c + \delta u X^c(x). \tag{84}$$

Transformovaný (aktivně přenesený) tenzor $T'^{ab}(x')$ potom bude

$$\begin{aligned} T'^{ab}(x') &= \frac{\partial x'^a}{\partial x^c} \frac{\partial x'^b}{\partial x^d} T^{ab}(x) \\ &= \left(\delta^a_c + \delta u \partial_c X^a\right) \left(\delta^b_d + \delta u \partial_d X^b\right) T^{ab} \\ &\simeq T^{ab}(x) + \delta u T^{cb} \partial_c X^a + \delta u T^{ad} \partial_d X^b. \end{aligned} \tag{85}$$

Po dosazení (83) a (85) do definice Lieovy derivace obdržíme výsledek

$$\begin{aligned} L_X T^{ab} &= \lim_{\delta u \to 0} \frac{T^{ab}(x) + \delta u X^d \partial_d T^{ab} - T^{ab}(x) - T^{cb} \partial_c X^a \delta u - T^{ad} \partial_d X^b \delta u}{\delta u} \\ &= X^d \partial_d T^{ab} - T^{cb} \partial_c X^a - T^{ad} \partial_d X^b. \end{aligned} \tag{86}$$

Vlastnosti Lieovy derivace plynoucí z definice:

- Linearita
$$L_X(\lambda Y^a + \mu Z^a) = \lambda L_X Y^a + \mu L_X Z^a, \tag{87}$$
- Leibnitzovo pravidlo
$$L_X(Y^a Z_{bc}) = Y^a (L_X Z_{bc}) + (L_X Y^a) Z_{bc} \tag{88}$$
- derivace skalárního pole
$$L_X \phi = X^a \partial_a \phi, \tag{89}$$
- derivace kontravariantního vektorového pole Y^a
$$L_X Y^a = [X, Y]^a = X^b \partial_b Y^a - Y^b \partial_b X^a, \tag{90}$$
- derivace kovariantního vektorového pole Y_a
$$L_X Y_a = X^b \partial_b Y_a + Y_b \partial_a X^b. \tag{91}$$

6 Killinovo pole a izometrie

Nyní budeme diskutovat problematiku izometrií v metrickém tenzoru. O metrice řekneme, že je "form-invariant"při transformaci $x^a \to x^{'a}$ pokud platí
$$g'_{ab}(y) = g_{ab}(y), \quad \forall y, \tag{92}$$
tj. transformovaná metrika $g'_{ab}(x')$ je stejnou funkcí argumentu x jako původní metrika $g_{ab}(x)$ která je funkcí x. Metrický tenzor se transformuje podle pravidla
$$g_{ab}(x) = \frac{\partial x^{'c}}{\partial x^a} \frac{\partial x^{'d}}{\partial x^b} g'_{cd}(x'). \tag{93}$$
Transformace $x^a \to x^{'a}$ je izometrií pokud právě tehdy, když platí
$$g_{ab}(x) = \frac{\partial x^{'c}}{\partial x^a} \frac{\partial x^{'d}}{\partial x^b} g_{cd}(x'). \tag{94}$$
Tato podmínka je obecně velmi komplikovaná. Ovšem pro infinitezimální, souřadnicovou transformaci
$$x^{'a} = x^a + \epsilon X^a(x) \tag{95}$$
se výpočty výrazně zjednoduší. Nejprve určeme $\partial x^{'a}/\partial x^b$. Dostáváme
$$\frac{\partial x^{'a}}{\partial x^b} = \delta^a_b + \epsilon \partial_b X^a. \tag{96}$$
Nyní použijme tuto transformaci v rovnici (93) a obdržíme (s využitím Taylorova rozvoje)
$$\begin{aligned} g_{ab}(x) &= (\delta^c_a + \epsilon \partial_a X^c)(\delta^d_b + \epsilon \partial_b X^d) g'_{cd}(x^i + \epsilon X^i) \\ &= g_{ab} + \epsilon \left(g_{ad}(x) \partial_b X^d + g_{cb}(x) \partial_a X^c + X^i \partial_i g_{ab} \right) + \sigma(\epsilon^2) \end{aligned} \tag{97}$$
odkud dostáváme rovnici
$$X^i \partial_i g_{ab} + g_{ad} \partial_b X^d + g_{db} \partial a X^d = 0 = L_X g_{ab}. \tag{98}$$

Tuto podmínku můžeme napsat ve tvaru

$$L_X g_{ab} = \nabla_b X_a + \nabla_a X_b = 0. \tag{99}$$

$\lhd$Rozpočítejme výraz

$$\begin{aligned}
\nabla_a X_b + \nabla_b X_a &= \partial_a X_b - \Gamma^c_{ab} X_c + \partial_b X_a - \Gamma^c_{ba} X_c \\
&= \partial_a X_b + \partial_b X_a - 2\Gamma^c_{ab} X_c \\
&= \partial_a X_b + \partial_b X_a - X^s(-g_{ab,s} + g_{sa,b} + g_{bs,a}) \\
&= g_{bs,a} X^s + g_{bs}\partial_a X^s + g_{as,b} X^s + g_{as}\partial_b X^s \\
&\quad - X^s(-g_{ab,s} + g_{sa,b} + g_{bs,a}) \\
&= X^s \partial_s g_{ab} + g_{as}\partial_b X^s + g_{bs}\partial_a X^s = L_X g_{ab}
\end{aligned} \tag{100}$$

$\rhd$

Rovnice (99) se nazývá Killingova rovnice a její řešení se nazývá Killingovo vektorové pole X^a. Tento výsledek můžeme shrnout do tvrzení, že infinitezimální isometrie je generována Killingovým vektorem $X^a(x)$ splňující rovnici $L_X g_{ab} = 0$.

A k čemu je to vlastně dobré? Killingův vektor asociovaný s daným metrickým polem nám odhalí integrál pohybu s ním spojený. Je-li ξ^a Killingův vektor a u^b je 4-rychlost částice, pak veličina $\xi^a u_a$ se zachovává podél příslušné geodetiky. Dokažme toto tvrzení.
$\lhd$Počítejme

$$\begin{aligned}
u^a \nabla_a(\xi_b u^b) &= u^a(\nabla_a \xi_b) u^b + \underbrace{u^a_(\nabla_a u^b)}_{=0(\text{geodetika})} \xi_b \\
&= \underbrace{-u^a(\nabla_b \xi_a) u^b}_{\text{Killingova rce}} = -u^a(\nabla_a \xi_b) u^b = 0.
\end{aligned} \tag{101}$$

To neznamená nic jiného, než že $\xi_b u^b$ se zachovává podél geodetiky dané tečným vektorem u^b. $\rhd$

V následujícím příkladu ilustrujeme jak ukázat, že dané vektorové pole je Killingovo pole. Uvažujme dvě vektorová pole $\xi^a = \delta^a_t$ a $\eta^b = \delta^b_\phi$ a metrické pole

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r\mathrm{d}t^2 + \frac{1}{f(r)})\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2. \tag{102}$$

Ukážeme, že obě zmíněná pole splňují Killingovu rovnici a najdeme s nimi asociované pohybové konstanty. Pro vektor ξ^a bude mít Killingova rovnice tvar

$$\partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a - 2\Gamma^c_{ab}\xi_c = 0 \tag{103}$$

a dále upravujme její levou stranu. Dostáváme

$$\begin{aligned}
L_\xi g_{ab} &= (g_{as}\xi^s)_{,b} + (g_{bs}\xi^s)_{,a} - \Gamma^c_{ab} g_{cs}\xi^s, \\
&= g_{at,b} + g_{bt,a} - 2g_{cs}\Gamma^c_{ab}\xi^s \\
&= g_{at,b} + g_{bt,a} - g_{ct}g^{cs}(-g_{ab,s} + g_{sa,b} + g_{bs,a}) \\
&= g_{at,b} + g_{bt,a} - \delta^s_t(-g_{ab,s} + g_{sa,b} + g_{bs,a}) \\
&= -g_{ab,t} = 0\,(\text{ protože je } g_{ab} \neq g_{ab}(t))
\end{aligned} \tag{104}$$

tzn. že vektorové pole ξ^a skutečně splňuje Killingovu rovnici a je tedy Killigovým polem. V případě vektorového pole η^b održíme výsledek

$$L_\eta g_{ab} = \cdots = -g_{ab,\phi} = 0\,(\text{platí totiž } g_{ab} \neq g_{ab}(\phi)). \tag{105}$$

Nyní nechť u^a je normovaný, tečný vektor ke geodetice γ. Jak jsme ukázali tak pro Killingovo vektorové pole X^a platí

$$u^a \nabla_a (\Xi_b u^b) = 0. \tag{106}$$

Pro Killinkva pole ξ^a a η^a dostáváme

$$u^a \nabla_a (\xi^b u_b) = u^a \nabla_a (u_t) = 0 \tag{107}$$

a

$$u^a \nabla_a (\eta^b u_b) = u^a \nabla_a (u_\phi) = 0 \tag{108}$$

takže podél geodetiky se zachovávají veličinami u_t a u_ϕ což, jak už víme z dřívějška, jsou záporně vzatá kovariantní energie a moment hybnosti neboli

$$u_t = -E \text{ a } u_\phi = L. \tag{109}$$

7 Schwarzchildovo řešení

V roce 1916 našel Karl Schwarzchild sféricky symetrické vakuové řešení Einsteinových rovnic

$$R_{ij} = 0. \tag{110}$$

Pro obecný tvar sféricky symetrické metriky ve tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = -B(r)\mathrm{d}t^2 + A(r)\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2 \tag{111}$$

určíme afinní konexi

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{is}(-g_{jk,s} + g_{sj,k} + g_{ks,j}) \tag{112}$$

a složky Ricciho tenzoru

$$R_{ij} = \Gamma^k_{ik,j} - \Gamma^k_{ij,k} + \Gamma^s_{ik}\Gamma^k_{js} - \Gamma^s_{ij}\Gamma^k_{sk} \tag{113}$$

a pro Γ obdržíme nenulové složky

$$\Gamma^t_{tr} = \Gamma^t_{rt} = \frac{B'(r)}{2B(r)}, \tag{114}$$

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{B'(r)}{2A(r)}, \tag{115}$$

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{A'(r)}{2A(r)}, \tag{116}$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{r}{A(r)}, \tag{117}$$

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -\frac{r\sin^2\theta}{A(r)}, \tag{118}$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}, \tag{119}$$

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\cos\theta\sin\theta, \tag{120}$$

$$\Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r}, \tag{121}$$

$$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot\theta. \tag{122}$$

a pro Ricciho tenzor nenulové složky ve tvary

$$R_{tt} = \frac{1}{4rA^2B}\left\{B'\left[rBA' + A(-4B + rB')\right] - 2rABB''\right\}, \tag{123}$$

$$R_{rr} = -\frac{1}{4rAB^2}\left[4B^2A' + rAB'^2 + rB(A'B' - 2AB'')\right], \tag{124}$$

$$R_{\theta\theta} = \frac{1}{2A^2B}\left[2AB(1-A) - r(BA' - AB')\right], \tag{125}$$

$$R_{\phi\phi} = \frac{\sin^2\theta}{2A^2B}\left[2AB(1-A) - r(BA' - AB')\right]. \tag{126}$$

Hledáme vakuové řešení, tj.

$$R_{tt} = R_{rr} = R_{\theta\theta} = R_{\phi\phi} = 0. \tag{127}$$

Nejprve určeme čemu se rovná $R_{rr}/A + R_{tt}B$ a obdržíme

$$\frac{R_{rr}}{A} + \frac{R_{tt}}{B} = -\frac{1}{rA}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right). \tag{128}$$

Protože platí (127) tak dostaneme rovnici

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B}, \tag{129}$$

jejímž řešením je

$$\ln A + \ln B = C \Rightarrow A = \frac{C}{B}. \tag{130}$$

Integrační konstantu C určíme z limity pro $r \to \infty$. Očekáváme, že v této limitě přechází zakřivený prostoročas v Minkowského, plochý, tj. $A(r \to \infty) = B(r \to \infty) = 1$, to implikuje $C = 1$. Mezi funkcemi A a B platí vztah

$$A = \frac{1}{B}. \tag{131}$$

Dosadíme tento výsledek do vztahu pro $R_{\theta\theta}$ a dostaneme rovnici

$$0 = -1 + rB' + B \Rightarrow (rB)' = 1 \tag{132}$$

a řešením je zřejmě

$$rB = r + C \Rightarrow B = 1 + \frac{C}{r}. \tag{133}$$

Složka $g_{tt} = -B$ metrického tenzoru bude ve velkých vzdálenostech, v Newtonově limitě, dána funkcí

$$g_{tt} = -1 - 2\Phi \tag{134}$$

takže platí

$$-1 - 2\Phi = -1 - C/r \Rightarrow C = 2\Phi = 2GM. \tag{135}$$

Výsledná metrika, pak je

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2. \tag{136}$$

8 Rovnice struktury hvězdy

Tentokráte budeme řešit Einsteinovy rovnice s nenulovou pravou stranou, tj.

$$R_{ij} = 8\pi G(T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T). \tag{137}$$

Model hvězdy bude naplněn ideální tekutinou, která je popsána tenzorem energie-hybnosti ve tvaru

$$T_{ij} = pg_{ij} + (\rho + p)u_iu_j \tag{138}$$

kde jsou p a ρ tlak a hustota a u^i je $4-$rychlost elementu tekutiny. Konfiguraci budeme považovat za izotropní a statickou, tzn., že metrika popisující geometrii uvnitř a vně hvězdy je

$$\mathrm{d}s^2 = -B(r)\mathrm{d}t^2 + A(r)\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2. \tag{139}$$

S využitím výsledků předchozí kapitoly a když si navíc uvědomíme, že pro $T_{\mu\nu}$ platí

$$T = T^i_{\ i} = \delta^i_i p + (\rho + p)u_iu^i = 4p - (\rho + p) = 3p - \rho \tag{140}$$

tak obdržíme rovnice

$$\theta - \theta \quad : \quad 1 - \frac{1}{A} + \frac{r}{2A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) = 4\pi G(\rho - p)r^2, \tag{141}$$

$$r - r \quad : \quad -\frac{B''}{2B} + \frac{A'}{rA} + \frac{B'}{4B}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) = 4\pi G(\rho - p)A, \tag{142}$$

$$t - t \quad : \quad \frac{B''}{2A} - \frac{B'}{4A}\left(\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A}\right) + \frac{B'}{2A} = 4\pi G(\rho + 3p)B. \tag{143}$$

Tenzor energie-hybnosti splňuje rovnic kontinuity

$$T^{ij}_{\ \ ;i} = 0 \tag{144}$$

která v našem konkrétním případě dá rovnici

$$g^{ij}p_{,i} + \left[(\rho+p)u^i u^j\right]_{;i} = 0 \tag{145}$$

$$g^{ij}p_{,i} + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}(\rho+p)u^i u^j\right) + \Gamma^j{}_{is}(\rho+p)u^i u^s = 0. \tag{146}$$

Je-li tekutina statická tak jediná nenulová složka 4-rychlosti je

$$u^t = \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}} \tag{147}$$

což plyne z normovací podmínky pro 4-rychlost $-1 = g_{ij}u^i u^j$. Časová derivace g, ρ a p vymizí, tzn.

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left[(\rho+p)u^i u^j\right] = 0, \tag{148}$$

a

$$\Gamma^i{}_{tt} = -\frac{1}{2}g^{is}\frac{\partial g_{tt}}{\partial x^s} \tag{149}$$

takže dostaneme rovnici hydrostatické rovnováhy

$$g^{ij}p_{,i} + \Gamma^j{}_{tt}(\rho+p)(u^t)^2 = g^{ij}p_{,i} + \frac{1}{2}g^{js}\frac{\partial g_{tt}}{\partial x^s}(\rho+p)\frac{1}{g_{tt}} = 0 \tag{150}$$

kterou nakonec píšeme ve tvaru

$$p_{,i} = -(\rho+p)\frac{\partial \ln(-g_{tt})^{1/2}}{\partial x^i}. \tag{151}$$

Jestliže je

$$g_{tt} = -B(r) \tag{152}$$

tak rovnice hydrostatické rovnováhy bude

$$p_{,j} = -\frac{1}{2}(\rho+p)\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial x^i}, \tag{153}$$

nebo lépe ($B = B(r)$)

$$\frac{p_{,r}}{\rho+p} = -\frac{1}{2}\frac{B_{,r}}{B}. \tag{154}$$

Rovnice pro funkci $A(r)$ plyne z následující identity. Snadno se přesvědčíme, že platí

$$\frac{R_{rr}}{2A} + \frac{R_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{R_{tt}}{2B} = 8\pi G\rho. \tag{155}$$

Po dosazení za R_{rr}, $R_{\theta\theta}$ R_{tt} obdržíme rovnici pro $A(r)$ ve tvaru

$$\frac{A'}{rA^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{Ar^2} = 8\pi G\rho. \tag{156}$$

Protože platí

$$\left(\frac{r}{A}\right)' = \frac{1}{A} - \frac{rA'}{A^2} \tag{157}$$

tak dostáváme pro A rovnici

$$\left(\frac{r}{A}\right)' = 1 - 8\pi G\rho r^2. \tag{158}$$

jejím řešením je

$$\left[\frac{r}{A(r)}\right]_0^r = r - 2G\int_0^r 4\pi\rho r^2 \mathrm{d}r. \tag{159}$$

Z předpokladu, že $A(0)$ je konečné tak dostaneme výsledek

$$A(r) = \left[1 - \frac{2GM(r)}{r}\right]^{-1}. \tag{160}$$

Zde jsme zavedli označení

$$M(r) = 4\pi\int_0^r \rho(r')r'^2 \mathrm{d}r'. \tag{161}$$

Zbývá určit funkci $B(r)$. Dříve než se k jejímu výpočtu dostaneme, určíme ze znalosti $A(r)$, rovnic (154) a (141) určíme rovnici hydrostatické rovnováhy ve hvězdě. Dostáváme

$$\tag{162}$$

9 Pohyb testovacích částic - úlohy

Příklad č.1: Alice (A) a Bob (B) si hrají na orbitě statické, sféricky symetrické planety P. Bob je na kruhové oběžné dráze o poloměru R. Alice je vystřelena radiálně z povrchu planety tak, že když dosáhne Bobovy orbity, $r = R$, tak si s ním synchronizuje hodinky. Alice doletí až do $r = R_1$ a poté volně padá zpátky k planetě a míjí Boba v okamžiku, kdy dokončí N-tý oběh od okamžiku, kdy se poprvé potkali. Zajímá nás jaké vzdálenosti, R_1, Alice dosáhla. Řešte nejprve v rámci Newtonovské mechaniky a poté v rámci OTR (prostoročas nechť je v takovém případě Schwarzchildův).
Řešení: Pohybová rovnice Boba zřejmě bude

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t^2} = \Omega. \tag{163}$$

Mezi prvním a druhým setkáním s Alicí vykoná N oběhů kolem planety. Doba která přitom uběhne je

$$\Delta t = \frac{\phi}{\Omega} = \frac{2N\pi}{\Omega}. \tag{164}$$

Pohyb Alice určuje pohybová rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{GM}{r^2}. \tag{165}$$

Když dosáhne $r = R_1$ tak se zataví a opět volně padá k povrchu planety. Tzn.

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}|_{R_1} = 0. \tag{166}$$

Rychlost Alice, $v = \mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ v závislosti na r získáme integrací rovnice (165). Platí totiž

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{GM}{r^2} \text{ a } \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}r}{v}. \tag{167}$$

Obdržíme tak rovnici

$$\int_0^v v\mathrm{d}v = -\int_{R_1}^r \frac{GM}{r^2}\mathrm{d}r \tag{168}$$

s řešením

$$v^2 = 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right). \tag{169}$$

Tento výsledek dosadíme do $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = v$ a dostaneme výraz pro dobu pohybu Alice z $r = R_1$ směrem k planetě ve tvaru

$$\frac{\Delta t}{2} = \int_R^{R_1} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2GM(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1})}}, \tag{170}$$

kde jsme za $r = R$ takže $\Delta t/2$ je doba, po kterou padá k orbitě kamaráda Boba. Tato doba je zřejmě poloviční než je doba oběhu Boba mezi dvěma setkáními s Alicí. Obdrželi jsme tak rovnici

$$\frac{\pi N}{\Omega} = \int_R^{R_1} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right)}}. \tag{171}$$

Volbou substituce $r/R_1 = \cos^2 x$ snadno vyřešíme integrál na pravé straně a získáme rovnici

$$\frac{\pi N}{\Omega} = \frac{2R_1^{3/2}}{(2GM)^{1/2}}\left[\frac{1}{2}\sin\left(2\arccos\sqrt{R/R_1}\right) - \arccos\sqrt{R/R_1}\right]. \tag{172}$$

Nechť se situace taková, že $R_1 >> R$ potom dostáváme přibližnou rovnici pro R_1 ve tvaru

$$\frac{\pi N}{\Omega} \simeq \frac{2R_1^{3/2}}{(2GM)^{1/2}} \Rightarrow R_1 \simeq \left[\frac{\pi N}{2\Omega}\right]^{2/3}(2GM)^3. \tag{173}$$

Teď řešme tuto úlohu v rámci OTR. Nyní si musíme uvědomit, že vlastní časy, které měří Bob a Alice nebudou při druhém setkání souhlasit. Zajímá nás tedy, kromě dosaženého R_1 taky poměr vlastních časů Boba a Alice při druhém setkání.

Schwarzchildova metrika je v ekvatoriální rovině dána prostoročasovým intervalem

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\phi^2. \tag{174}$$

Bobovy nenulové složky 4-rychlosti jsou U^t a U^ϕ. Úhlová rychlost je definována vztahem

$$\Omega \equiv \frac{U^\phi}{U^t} \tag{175}$$

takže azimutální souřadnice Boba bude měnit se souřadnicovým časem t opět podle jednoduché formule

$$\phi = \Omega t. \tag{176}$$

Po N obězích mezi dvěma setkáními s Alicí bude interval souřadnicového času roven

$$\Delta t = \frac{2\pi N}{\Omega}. \tag{177}$$

Pohybová rovnice pro Alici je tentokráte následující

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = -sqrtE^2 - (1 - 2GM/r) \tag{178}$$

kde kovariantní energie E bude mít hodnotu (na $r = R_1$ je $U^r = 0$)

$$E^2 = 1 - \frac{2GM}{R_1}. \tag{179}$$

Pohybová rovnice pak přejde na tvar

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right)}. \tag{180}$$

Rovnice (180) je formálně stejná s rovnicí (169) (po odmocnění). Zásadní rozdíl je parametru který parametrizujeme r. V případě OTR je to vlastní čas τ. Abychom mohli srovnat dobu kterou padá Alice k Bobově orbitě s Δt musíme přejít od τ k t. Vztah mezi vlastním a souřadnicovým časem ve Schwarzchildově poli je

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = (1 - 2GM/r)^{-1}. \tag{181}$$

Rovnice (180) tak přejde v rovnici

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right)}. \tag{182}$$

Dostáváme se k rovnici

$$\frac{\Delta t}{2} = \frac{\pi N}{\Omega} = -\int_{R_1}^{R} \frac{\mathrm{d}r}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right)}}. \tag{183}$$

Věnujme se integrálu na pravé straně rovnice

$$I = \int_{R_1}^{R} \frac{r}{r - 2GM}\sqrt{\frac{R_1 r}{R_1 - r}}\mathrm{d}r. \tag{184}$$

Tento integrál řešme substitucí

$$x = \sqrt{\frac{r}{R_1 - r}}. \tag{185}$$

Pro diferenciál $\mathrm{d}r$ dostaneme výraz

$$\mathrm{d}r = \frac{2r^2}{R_1 x^3}\mathrm{d}x \tag{186}$$

a pro r dostaneme funkci

$$r = \frac{R_1 x^2}{1 + x^2}. \tag{187}$$

Po úpravách dostáváme I ve tvaru

$$I = \frac{\sqrt{2R_1^5}}{R_1 - 2}\int \frac{\mathrm{d}x^4}{(x-b)(x+b)(1+x^2)^2}. \tag{188}$$

kde jsme zavedli označení $b^2 = 2/(R_1 - 2)$. Takto transformovaný integrál lze řešit metodou parciálních zlomků, tj. integrand převedeme na tvar

$$\frac{x^4}{(x-b)(x+b)(1+x^2)^2} = \frac{A}{x-b} + \frac{B}{x+b} + \frac{Cx+D}{(1+x^2)^2} + \frac{Ex+F}{(1+x^2)}. \tag{189}$$

Pro parametry A, B, C, D, E a F obdržíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
-A + B + bD + BF &= 0, & (190)\\
-A - B + b^2C + b^2E &= 0, & (191)\\
-2bA + 2bB - D - F + b^2F &= 0, & (192)\\
-2A - 2B - C - E - b^2E &= 0, & (193)\\
-bA - bB - F &= 1, & (194)\\
A + B + E &= 0. & (195)
\end{aligned}$$

Snadno určíme, že jednotlivé parametry jsou

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{b^3}{(1+b^2)^2}, & (196)\\
B &= \frac{b^3}{2(1+b^2)^2}, & (197)\\
C &= 0, & (198)\\
D &= \frac{1}{1+b^2}, & (199)\\
E &= 0, & (200)\\
F &= -\frac{1+2b^2}{(1+b^2)^2}. & (201)
\end{aligned}$$

Integrál I potom bude

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\sqrt{2R_1^5}}{R_1-2}\left\{\frac{b^3}{2(1+b^2)^2}\left[-\int_{x(R)}^{x(R_1)}\frac{\mathrm{d}x}{x-b} + \int_{x(R)}^{x(R_1)}\frac{\mathrm{d}x}{x+b}\right]\right.\\
&\left. -\frac{1+2b^2}{(1+b^2)^2}\int_{x(R)}^{x(R_1)}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \frac{1}{1+b^2}\int_{x(R)}^{x(R_1)}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}\right\}. \qquad (202)
\end{aligned}$$

Tento integrál snadno vyjádříme pomocí elementárních funkcí a výsledek bude

$$\begin{aligned}
\frac{\pi N}{\Omega} &= \frac{\sqrt{2R_1^5}}{R_1-2}\left\{-\frac{\pi}{2}\frac{1+3b^2}{2(1+b^2)^2} + \frac{b^3}{2(1+b^2)^2}\log\left|\frac{\sqrt{R/(R_1-R)}-b}{\sqrt{R/(R_1-R)}+b}\right|\right.\\
&\left.\frac{1+3b^2}{2(1+b^2)^2}\arctan\sqrt{\frac{R}{R_1-R}} - \frac{\sqrt{R(R_1-R)}}{2R_1(1+b^2)}\right\} \qquad (203)
\end{aligned}$$

kde meze integrace jsou $x(R_1) \to \infty$ a $x(R) = \sqrt{R/(R_1-R)}$. Poznamenejme ještě způsob určení integrálu

$$J = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}. \tag{204}$$

Metodou per-partes určeme nejprve integrál

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} &= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\mathrm{d}x - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{205}$$

odkud zřejmě plyne výsledek

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} &= \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ &= \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x + const. \end{aligned} \tag{206}$$

Jestliže se Alici podaří doletět do velké vzdálenosti $R_1 >> R$, tak můžeme poslední rovnici aproximovat vztahem

$$\frac{\pi N}{\Omega} \simeq \frac{2R_1^5}{R_1 - 2} \sim \sqrt{2}R_1^{3/2} \tag{207}$$

a když vyjádříme R_1 tak budeme mít výsledek ve tvaru

$$R_1 \simeq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi N}{\Omega}\right)^{2/3}. \tag{208}$$

Nyní už jen zbývá porovnat hodinky Alice a Boba. Přejděme ke konkrétním hodnotám. Nechť je Bob na orbitě o poloměru $R = 6$ a nechť mezi dvěma kontakty s Alicí vykoná $n = 10$ orbit. V takovém případě bude $R_1 \simeq 47.4$ (hodnota z numerického řešení je $R_1 \approx 54$). V případě Boba je výpočet opět jednoduchý. Na kruhové orbitě totiž platí

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} = g^{\phi\phi}L = \frac{1}{r^2}\frac{r}{\sqrt{r-3}} \tag{209}$$

odkud zřejmě plyne doba, která uplynula na Bobových hodinkách mezi dvěma kontakty s Alicí, ve tvaru

$$\tau_B = R\sqrt{R-3}\int_0^{2N\pi} \mathrm{d}\phi = 2\pi N R\sqrt{R-3} \approx 652.968. \tag{210}$$

Alice se pohybuje po radiální geodetice na které v bodě $r = R_1$ je $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\tau = 0$, tj. pád z $r = R_1$ máme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = -\sqrt{2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right)}. \tag{211}$$

Doba, která uběhne na hodinách Alice bude dána formulí

$$\begin{aligned}\tau_A &= -2\int_{R_1}^{R} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2(1/r - 1/R_1)}} \\ &= 2\sqrt{2}R_1^{3/2}\left(\frac{1}{2}\arccos\sqrt{\frac{R}{R_1}} + \frac{1}{4}\sin\left(2\arccos\sqrt{\frac{R}{R_1}}\right)\right) \approx 710.52 \end{aligned} \tag{212}$$

tj. poměr mezi oběma hodnotami bude

$$\frac{\tau_A}{\tau_B} = 1.08814. \tag{213}$$

Příklad č.2: Uvažujme sondu na kruhové orbitě $R_1 = 6M$ ve Schwarzchildově poli. Jak se musí změnit moment hybnosti L a kovariantní energie sondy aby dosáhla orbity $R_2 = 12M$. Jak se musí dále změnit E a L aby sonda zůstala na kruhové orbitě R_2.
Řešení: Kovariantní energie a moment hybnosti na kruhové orbitě R_1 jsou

$$E_1^2 = \frac{(R_1-2)^2}{R_1(R_1-3)} = \frac{8}{9}, \quad L_1^2 = \frac{R_1^2}{R_1-3} = 12. \tag{214}$$

Nyní chceme přesunout sondu z R_1 na R_2 a to tak, že pericentrum nové trajektorie bude na R_1 a apocentrum na R_2, tj. $U^r(R_1) = U^r(R_2) = 0$. Energii E_t a moment hybnosti L_t této orbity získáme ze soustavy dvou rovnic

$$0 = E_t^2 - (1-2/R_1)(1+L_t^2/R_1^2), \tag{215}$$

$$0 = E_t^2 - (1-2/R_2)(1+L_t^2/R_2^2) \tag{216}$$

a obdržíme výsledek

$$E_t^2 = \frac{(R_1-2)(R_2-2)(R_1+R_2)}{R_1^2(R_2-2)+R_1(R_2-2)R_2-2R_2^2} = 0.909091 \tag{217}$$

$$L_t^2 = \frac{2R_1^2R_2^2}{R_1^2(R_2-2)+R_1(R_2-2)R_2-2R_2^2} = 13.0909. \tag{218}$$

Tzn. že kovariantní energie bude $E_t/E_1 = 1.0113$ krát větší a moment hybnosti bude $L_t/L_1 = 1.04447$ krát větší. Po dosažení $r = R_2$ tak musíme opět změnit energii a moment hybnosti. Na kruhové orbitě jsou obě veličiny provázány. Kruhová orbita na R_2 má následující pohybové konstanty

$$E_2^2 = \frac{(R_2-2)^2}{R_2-3)} = 0.925926, \tag{219}$$

$$L_2^2 = \frac{R_2^2}{R_2-3} = 16. \tag{220}$$

Kovariantní energii teď musí být $E_2/E_t = 1.00922$ krát větší a moment hybnosti $L_2/L_t = 1.10554$ krát větší.